PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

Soit n un entier ≥ 1. On identifiera dans tout le problème les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note ${}^tM$ la transposée d'une matrice M. On rappelle que l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(X,Y) \mapsto {}^tX.Y$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ est dit stable par f si l'on a $f(F) \subset F$. L'identité de $\mathbb{R}^n$ est notée Id.

I

1. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Calculer les coefficients de la matrice $X.{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On vérifiera que les colonnes de cette matrice sont toutes proportionnelles à X. Quel est le rang de cette matrice ?

2. Pour p entier avec $1 \leq p \leq n$, on donne un système libre $(X_1, \cdots, X_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et p vecteurs arbitraires $Z_1, \cdots, Z_p$ de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'égalité $X_1.{}^tZ_1 + \cdots + X_p.{}^tZ_p = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \cdots, Z_p$ sont tous nuls.

3. Rappeler quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etant données deux bases $(X_1, \cdots, X_n)$ et $(Y_1, \cdots, Y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, montrer que les matrices $(X_i.{}^tY_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ constituent une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, que l'on représente dans la base canonique par la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose, dans cette section uniquement, que f est diagonalisable. Si λ est valeur propre de f, on note E_λ l'espace propre associé. On note g l'endomorphisme représenté dans la base canonique par ${}^tA$ et on pose $E'_\lambda = Ker(g - \lambda Id)$.

1. Prouver que g est diagonalisable et possède les mêmes valeurs propres que f, avec les mêmes ordres de multiplicité.

2. Soit X un vecteur de E_λ et Y un vecteur propre de g associé à une valeur propre μ différente de λ. En calculant de deux manières ${}^tY.A.X$, établir la relation : ${}^tY.X = 0$.

3. Soit λ une valeur propre d'ordre de multiplicité m de f, et $(X_1, \cdots, X_m)$ une base de E_λ. Montrer qu'il existe une base $(Y_1, \cdots, Y_m)$ de E'_λ, vérifiant pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq m$ les relations :
$(\mathcal{P}_{i,j})$ ${}^tY_i.X_j = \delta_{i,j}$
où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon.
Déduire de ce qui précède qu'il existe une base $(X_1, \cdots, X_n)$ constituée de vecteurs propres de f et une base $(Y_1, \cdots, Y_n)$ de vecteurs propres de g qui vérifient les relations $(\mathcal{P}_{i,j})$ pour i et j compris entre 1 et n. Dans ces mêmes conditions, prouver l'égalité $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i.{}^tY_i$, où, pour $1 \leq i \leq n$, λ_i est la valeur propre associée à X_i.

4. Déterminer des bases (X_1, X_2, X_3) et (Y_1, Y_2, Y_3) vérifiant les relations $(\mathcal{P}_{i,j})$ pour i et j compris entre 1 et 3, lorsque A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & 5 \\ -5 & 5 & 24 \end{pmatrix}$$

(on détaillera la méthode suivie).

III

On conserve les notations de la section II, mais on ne suppose plus que f est diagonalisable. On considère une valeur propre λ de f, d'ordre de multiplicité m. On pose $f_\lambda = f - \lambda Id$ et l'on note F_λ l'image de f_λ.

1. Montrer que E_λ et F_λ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si leur intersection est réduite au vecteur nul.

2. On suppose que $E_\lambda \cap F_\lambda$ contient un vecteur $X \neq 0$, et on considère un vecteur Y solution de $f_\lambda(Y) = X$.
a) Montrer que le système (X, Y) est libre.
b) En utilisant une base convenable complétant le système précédent, prouver que l'on a $dim(E_\lambda) \leq m - 1$.

3. Montrer que s'il existe un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ à la fois stable par f et supplémentaire de E_λ, on a $dim(E_\lambda) = m$.

4. Déduire des résultats de cette section l'équivalence :
$dim(E_\lambda) = m \Leftrightarrow E_\lambda$ et F_λ sont supplémentaires.

IV

On conserve les notations des sections II et III. Dans cette section, on suppose $n \geq 2$. On suppose aussi que f n'a qu'une valeur propre λ, d'ordre de multiplicité n, et que $dim(E_\lambda) = 1$.

1. Quelle est la dimension de F_λ ?

2. Etablir qu'il existe une base $(X_1, \cdots, X_n)$ vérifiant les relations suivantes :
$(\mathcal{R}_f)$ $f_\lambda(X_1) = 0$, et $\forall k,\ 2 \leq k \leq n,\ f_\lambda(X_k) = X_{k-1}$.
Pour cela on fera un raisonnement par récurrence sur n, en considérant l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace F_λ.

3. Montrer que λ est également la seule valeur propre de g et que E'_λ est aussi de dimension 1. On note dans ce qui suit $(Y_1, \cdots, Y_n)$ une base vérifiant les relations $(\mathcal{R}_g)$ analogues à celles de la question précédente.
Montrer qu'on a, d'une part pour $1 \leq k \leq n-1$, ${}^tY_1.X_k = 0$, et d'autre part, ${}^tY_1.X_n \neq 0$. Prouver qu'il existe une base $(Y_1, \cdots, Y_n)$ vérifiant $(\mathcal{R}_g)$, ainsi que la propriété suivante :

$$ {}^tY_i.X_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i+j = n+1 \\ 0 & \text{si} \quad i+j \neq n+1. \end{cases} $$

Déterminer alors les coordonnées de la matrice A dans la base $(X_i.{}^tY_j)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Pour $n = 3$ déterminer deux bases $(X_1, X_2, X_3), (Y_1, Y_2, Y_3)$ ayant les propriétés de la question précédente, quand la matrice A vaut

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}. $$